## **培优课17 圆锥曲线中的最值、范围问题**

### **培优点一 最值问题**

#### **审题指导**

典例1 [2023·全国甲卷]已知直线与抛物线交于,两点，且（审题①联立方程,考虑韦达定理代入弦长公式）.

（1）求；

（2）设为的焦点，,为上两点，（审题②核心条件转化为韦达定理的形式），求（审题③先得到面积的表达式再考虑利用函数思想求最值）.

**解题观摩**

[解析]（1）设,，

由可得，，所以,，

，…………审题①

即，因为，所以.

（2）因为，所以直线的斜率不可能为零，

设直线，,，

由可得，所以,，

，

因为，，…………审题②

即，

得，

将,代入，

得，，

所以，且，解得或.

设点到直线的距离为，则，

，

，…………审题③

而或，所以当时，

.…………审题③

#### **通性通法**

圆锥曲线中的最值问题类型较多,解法灵活多变,但总体上主要有两种方法:

1.几何法,若题目的条件和结论能明显体现几何特征及意义,则考虑利用图形性质来解决.

2.代数法,若题目的条件和结论能体现一种明确的函数关系,则可先建立起目标函数,再求这个函数的最值,最值常用基本不等式法、配方法及导数法求解.

#### **培优训练**

##### **从抛物线变到椭圆条件变式**

[2024·山东模拟]已知椭圆的离心率为，且经过点.

（1） 求椭圆的方程；

[解析]由题意得解得，，

椭圆方程为.

（2） 若，为椭圆上两点，直线与的倾斜角互补，求面积的最大值.

[解析]由题意可知直线的斜率一定存在，

设直线的方程为，，，

将代入，得，

，，

则，

.

直线和直线的倾斜角互补，，化简可得，

即，即，

直线不过点，，，，

则，

，，

又点到直线的距离为，

，

当且仅当时，等号成立，面积的最大值为.

### **培优点二 范围问题**

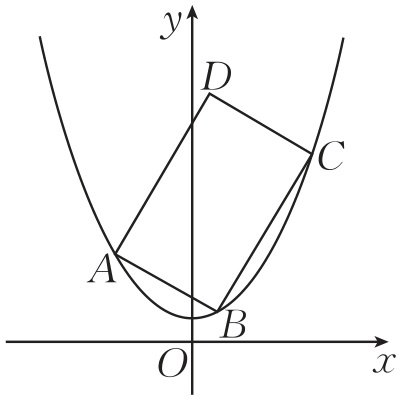
#### **审题指导**

典例2 [2023·新高考Ⅰ卷节选]在直角坐标系中，已知矩形有三个顶点在曲线上，证明：（审题①周长问题转为邻边之和问题 审题②矩形的邻边互相垂直转化为斜率关系 审题③得到周长的表达式后考虑利用函数思想求范围.）

**解题观摩**

[解析]如图，设矩形的三个顶点,,在曲线上,且，易知矩形四条边所在直线的斜率均存在，且不为0，

则,,令，



同理令，，…………审题②

设矩形的周长为,由对称性不妨设，则，

…………审题

由，易知,

,…………审题③

令，解得.

当时，，单调递减；

当时，，单调递增.

故，故,即.

当时,,,且，即当时等号成立，矛盾.故.得证.

#### **通性通法**

**圆锥曲线中范围问题的四个解题策略**

1.利用圆锥曲线的几何性质或判别式构造不等关系,从而确定参数的取值范围.

2.利用已知参数的范围,求新参数的范围,解这类问题的核心是建立两个参数之间的等量关系.

3.利用已知或隐含的不等关系建立不等式,从而求出参数的取值范围.

4.利用求函数的值域的方法将待求量表示为其他变量的函数,求其值域,从而确定参数的取值范围.

#### **培优训练**

##### **从求三角形周长范围变到求面积范围条件变式**

[2024·山东模拟]已知双曲线的实轴长为2，是抛物线的准线与的一个交点.

（1） 求双曲线和抛物线的方程；

[解析]由题意得，，又点在双曲线上，所以，解得，故双曲线方程为.

又点在抛物线的准线上，所以，即，故抛物线的方程为.

（2） 若过双曲线上一点作抛物线的切线，切点分别为，，求面积的取值范围.

[解析]显然直线的斜率存在，故设直线的方程为，,，

联立得，

所以,，又，，

故切线，结合整理得，同理，切线，

联立

解得即

故.

又，且，即，所以，

又在双曲线上，且，所以，故面积的取值范围为.